Теория [Метод Крамера]

Пример 1. Решить систему уравнений методом Крамера

{math}delim{lbrace}{matrix{3}{1}{{5x_1-x_2+2x_3=-2} {2x_1+3x_2-4x_3=19} {x_1+2x_2+3x_3=1}}}{ }{/math}

Решение:

Составим и вычислим сначала главный определитель этой системы: {math}Delta=delim{|}{matrix{3}{3}{5 {-1} 2 2 3 {-4} 1 2 3}}{|}=5*3*3+(-1)*(-4)*1+2*2*2-1*3*2-2(-1)*3-2(-4)*5={/math}

{math}{=}45+4+8-6+6+40=97{/math}

Так как {math}Delta<>0{/math}, то система имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамера:

{math}x_1=Delta_1/Delta;~ x_2=Delta_2/Delta;~ x_3=Delta_3/Delta;{/math}

где {math}Delta_1,~ Delta_2,~ Delta_3{/math} получаются из определителя {math}Delta{/math} путем замены 1-го, 2-го или 3-го столбца, соответственно, на столбец свободных членов.

{math}Delta_1=delim{|}{matrix{3}{3}{{-2} {-1} 2 19 3 {-4} 1 2 3}}{|}=97,~~Delta_2=delim{|}{matrix{3}{3}{5 {-2} 2 2 19 {-4} 1 1 3}}{|}=291,~~Delta_3=delim{|}{matrix{3}{3}{5 {-1} {-2} 2 3 19 1 2 1}}{|}=-194{/math}

Таким образом:

{math}x_1=Delta_1/Delta=97/97=1;~ x_2=Delta_2/Delta=293/97=3;~ x_3=Delta_3/Delta=-194/97=-2{/math}

Итак, {math}x_1=1, x_2=3, x_3=-2{/math} - единственное решение.

Пример 2. Решить систему уравнений методом Крамера

{math}delim{lbrace}{matrix{4}{1}{{2x_1+x_2-5x_3+x_4=-11} {x_1-3x_2-6x_4=-4} {2x_2-x_3+2x_4=0} {x_1+4x_2-7x_3+6x_4=-11}}}{ }{/math}

Решение:

Составим главный определитель этой системы: {math}Delta=delim{|}{matrix{4}{4}{2 1 {-5} 1 1 {-3} 0 {-6} 0 2 {-1} 2 1 4 {-7} 6}}{|}{/math}

Используя свойства определителя, создадим в первом столбце нули. Для этого

- Вторую и третью строку оставим без изменеий,
- Умножим вторую строку на -2 и добавим к первой
- Умножим вторую строку на -1 и добавим к четвертой

После этих преобразований значение определителя не изменится, но он наберет следующий вид {math}Delta=delim{|}{matrix{4}{4}{0 7 {-5} 13 1 {-3} 0 {-6} 0 2 {-1} 2 0 7 {-7} 12}}{|}{/math}

Теперь, воспользовавшись определением определителя и разложив его по элементам четвертого столбца, получим:

{math}Delta=1*(-1)^(2+1)delim{|}{matrix{3}{3}{7 {-5} 13 2 {-1} 2 7 {-7} 12 }}{|}=delim{|}{matrix{3}{3}{7 5 13 2 1 2 7 7 12 }}{|}=7*1*12+5*2*7+13*7*2-7*1*13-5*2*12-{/math}

{math}{-}7*7*2=84+70+182-91-120-98=27{/math}

Итак, главный определитель системы уравнений отличен от нуля. По правилу Крамера такая система имеет единственное решение. Найдем его. Для этого создадим и вычислим еще четыре определители:

{math}Delta_1=delim{|}{matrix{4}{4}{{-11} 1 {-5} 1 {-4} {-3} 0 {-6} 0 2 {-1} 2 {-11} 4 {-7} 6}}{|}=-27 ~~Delta_2=delim{|}{matrix{4}{4}{2 {-11} {-5} 1 1 {-4} 0 {-6} 0 0 {-1} 2 1 {-11} {-7} 6}}{|}=27{/math}

{math}Delta_3=delim{|}{matrix{4}{4}{2 1 {-11} 1 1 {-3} {-4} {-6} 0 2 0 2 1 4 {-11} 6}}{|}=54~~Delta_4=delim{|}{matrix{4}{4}{2 1 {-5} {-11} 1 {-3} 0 {-4} 0 2 {-1} 0 1 4 {-7} {-11}}}{|}=0{/math}

По правилу Крамера имеем решение:

{math}x_1=Delta_1/Delta={-27}/27=-1;~ x_2=Delta_2/Delta=27/27=1;~ x_3=Delta_3/Delta=54/27=2;~ x_4=Delta_4/Delta=0/27=0{/math}

Итак, {math}x_1=-1, ~x_2=1,~ x_3=2,~ x_4=0{/math} - единственное решение.